УДК 519.86
DOI: https://doi.org/10.32782/business-navigator.75-52

Бойчук М.В.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри економіко-математичного моделювання
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Вінничук І.С.
кандидат економічних наук, доцент,
асистент кафедри економіко-математичного моделювання
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Вінничук О.Ю.
кандидат економічних наук, доцент,
доцент кафедри економіко-математичного моделювання
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Boychuk Myroslav
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent,
Associate Professor of the Department of Economic and Mathematical Modelling
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

Vinnychuk Igor
Candidate of Economic Sciences, Associate Professor,
Assistant at the Department of Economic and Mathematical Modelling
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

Vinnychuk Olena
Candidate of Economic Sciences, Docent,
Associate Professor of the Department of Economic and Mathematical Modelling
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

СТОХАСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ЗВ'ЯЗКІВ МІЖ ТІНЬОВОЮ ТА ЛЕГАЛЬНОЮ ЕКОНОМІКАМИ

STOCHASTIC MODELLING OF OPTIMAL LINKS BETWEEN THE SHADOW AND LEGAL ECONOMIES

Стаття присвячена стохастичному моделюванню оптимальних зв'язків між тіньовою та легальною економіками з використанням вінерівських і пуассонівських процесів. Дослідження зосереджено на визначення найкращих стратегій управління, які сприятимуть зменшенню розмірів тіньової економіки. У роботі спочатку розглядається детермінована економіко-математична модель зв'язку між тіньовою та легальною економіками, яка подається у формі диференціальних рівнянь з початковими умовами. Ці диференціальні рівняння описують швидкість зміни заощаджень працівників реального сектора, динаміку заощаджень власників, швидкість зміни ціни агрегованої продукції тощо. Припущення динаміки руху грошових заощаджень і ціни агрегованої продукції доповнено початковими умовами. Сформовано обмеження на споживчі частки заощаджень, що використовуються для споживання легальної і тіньової продукції для працівників і підприємців. За критерій мети взято максимізацію середніх сумарних (інтегральних) заощаджень працівників і підприємців протягом визначеного періоду часу. У математичному плані економіко-математична модель є задачею стохастичного оптимального керування Дослідження стохастичної задачі оптимального керування проведено з використанням стохастичних достатніх умов оптимальності.

Ключові слова: тіньова економіка, легальна економіка, стохастичне моделювання, теорія оптимального керування, оптимальний процес.

The article is devoted to the stochastic modelling of optimal links between the shadow and legal economies using Wiener and Poisson processes. The study focuses on identifying the best management strategies that will help reduce the size of the shadow economy. The paper first considers a deterministic economic and mathematical model of the relationship between the shadow and legal economies, which is presented in the form of differential equations with initial conditions. These differential equations describe the rate of change of real sector workers' savings, the dynamics of owners' savings, the rate of change of the price of aggregate output, etc. The assumptions about the dynamics of cash savings and the price of aggregate output are supplemented by initial conditions. Restrictions on the consumer shares of savings used for consumption of legal and shadow products for employees and entrepreneurs are formed. To build an optimal process, the author formalizes an objective function (objective criterion) that maximizes the average total (integral) savings of employees and entrepreneurs over a certain period of time and uses stochastic sufficient conditions for optimality, where the controls are the shares of savings used to purchase aggregate products of the legal and shadow economies of employees and business owners, and the phase trajectories are the monetary savings of employees and business owners of legal and shadow economies, the price of a unit of aggregate products, and the price of a unit of aggregate products. Thus, the main idea of the process of solving the optimal management problem takes into account both the management process itself (strategies, management methods) and the paths along which the system moves from the initial state to the final result (phase trajectories). The structure of the optimal process of the proposed stochastic model is described. It is established that the optimal controls are deterministic values and do not depend on the coefficients of the Wiener processes in the proposed stochastic dynamic model. It is also worth noting that the specific formulation of this problem of optimal control of the interaction between the shadow and legal economies depends on the context of the study and may vary depending on the tasks and assumptions set.

Key words: shadow economy, legal economy, stochastic modelling, optimal control theory, optimal process.

Постановка проблеми. На сучасному етапі економічного розвитку, дослідження взаємодії тіньової та легальної економіки стає ключовим аспектом для розуміння багатьох явищ, зокрема економічних, соціальних, податкових, правових тощо. Тіньова економіка безперечно впливає на стійкість економіки, обсяги податкових надходжень, соціальний прогрес, ефективність господарювання, міжнародні відносини і загальну безпеку країни. Проте, питання ефективного контролю та взаємодії між цими двома секторами залишається недостатньо дослідженим. На сьогодні актуально проведення досліджень для визначення факторів, які сприяють зростанню тіньового сектору, а також пошук шляхів детінізації економіки. Враховуючи те, що економічні показники є випадковими величинами, виключення певних показників у економіко-математичних моделях призводить до появи випадковостей, для вивчення яких потрібно знати закони їх розподілу ймовірностей. Отже, важливим є дослідження стохастичних процесів як у теоретичному, так і у практичному плані, зокрема, стохастичне моделювання оптимальних зв’язків між тіньовою та легальною економіками.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідження взаємодії тіньової та легальної економіки є актуальними темами в економічній науці. Різноманітність напрямів дослідження впливу факторів, які сприяють зростанню тіньового сектору складають широкий спектр наукових напрямків у даній області. Варто виділити видатних економістів, які досліджували тіньову економіку, зокрема Е. Фейга, Ф. Шнайдера, Е. Гроссмана, В. Танці тощо [0–0]. Е. Фейг у своїй роботі «Reflections on the meaning and measurement of Unobserved Economies: What do we really know about the 'Shadow Economy'?» досліджував поняття та вимірювання «ненаглядних економік», також відомих як «тіньова економіка». Він розглядав питання, пов’язані з тим, що насправді відомо про цей феномен, його природу, розмір та вплив на економіку [0]. У статті «Shadow Economies: Size, Causes, and Consequences», Ф. Шнайдер та Д. Енте досліджували різноманітні аспекти тіньової економіки, а саме досліджували обсяг та розміри тіньової економіки у різних країнах світу, розглянули фактори та причини, які спонукають людей та підприємства до участі у тіньовій економіці. Вони виділять податкові та регуляторні навантаження, складність бюрократичних процедур, відсутність довіри до урядових структур тощо [0]. Що стосується моделювання тіньової економіки, то зауважимо, що це процес є складним, потребуючи застосування різноманітних підходів та методологій. Враховуючи поширеність та вплив тіньових економічних процесів, розвиток та застосування моделей тіньової економіки є важливим завданням для вчених, економістів, урядових органів та практикуючих фахівців тощо. У [0] побудовано декілька математичних моделей для дослідження функціонування легального та тіньового секторів економіки у просторах змінних, що відображають структуру суспільства. Побудовані моделі можуть бути розширені та модифіковані [0–0].

Наші дослідження спрямовані на побудову стохастичної моделі оптимальних зв’язків між тіньовою та легальною економіками, яка є задачею стохастичного оптимального керування. Теорія оптимального керування, у свою чергу, є потужним інструментом, дозволяючи визначити оптимальні стратегії управління, що максимізують визначені показники з урахуванням припущень моделі. Отже, моделювання взаємодії тіньової та легальних економік є актуальним і потребує постійного вдосконалення та досліджень для забезпечення стійкого та ефективного розвитку економічних систем.

Формулювання завдання дослідження. Метою статті є побудова стохастичної моделі оптимальних зв’язків між тіньовою та легальною економіками із допомогою вінерівських і пуассонівських процесів. Основні завдання статті полягають у побудові математичної моделі, що описує оптимальні взаємозв’язки між тіньовою та легальною економіками, визначення цілей та обмежень, які стосуються цих взаємозв’язків; побудову оптимальних стратегій управління системою тіньової та легальної економіки, що включає розробку процесів управління.

Використання у моделюванні вінерівських і пуассонівських процесів аргументовано, тим, що економічні показники є випадковими величинами і у [0] наведене економічне обгрунтування використання цих випадкових процесів при стохастичному моделюванні. Нагадаємо, що вінерівським процесом називають стохастичний, процес приріст економічного показника якого підпорядкований нормальному закону розподілу із нульовим математичним сподіванням та одиничною дисперсією. Пуассонівський процес підпорядкований пуассонівському закону розподілу, але пуассонівський закон розподілу є нормальним законом розподілу із малими ймовірностями (рідкісні події). А тому при стохастичному моделюванні можна використовувати лінійні комбінації (у припущені) вінерівських і пуассонівських процесів.

Виклад основного матеріалу дослідження. Спочатку формалізуємо детерміновану економіко-математичну модель зв'язку між тіньовою та легальною економіками [0], а потім на її основі побудуємо стохастичну модель.

Детермінована модель зв'язку між тіньовою та легальною економіками має вигляд:

$$\frac{d}{dt}x_1(t) \equiv \dot{x}_1(t) = p(t)\left[r_L(1-k_L) + r_S(1-k_S) - G\left(\frac{\alpha_1 x_1(t)}{p(t)}\right) - G\left(\frac{\beta_1 x_1(t)}{p(t)}\right)\right],$$

$$\frac{d}{dt}x_2(t) \equiv \dot{x}_2(t) = \frac{p(t)}{\tilde{n}_2}(1-k_L)\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\alpha_i x_i(t)}{p(t)}\right) + \frac{p(t)}{\tilde{n}_2}(1-k_S)\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\beta_i x_i(t)}{p(t)}\right) - p(t)G\left(\frac{\alpha_2 x_2(t)}{p(t)}\right) - p(t)G\left(\frac{\beta_2 x_2(t)}{p(t)}\right) -$$

$$-\frac{p(t)}{\tilde{n}_2}\left[\tilde{n}_1 r_L\left(1+k_L^*\right) + \tilde{n}_1\left(\lambda_L + k_L^{**}\right)F\left(\frac{\tilde{n}_2\delta_2 x_2(t)}{\tilde{n}_1 p(t)}\right)\right] -$$

$$-\frac{p(t)}{\tilde{n}_2}\left[\tilde{n}_1 r_S\left(1+k_S^*\right) + \tilde{n}_1\left(\lambda_S + k_S^{**}\right)F\left(\frac{\tilde{n}_2\gamma_2 x_2(t)}{\tilde{n}_1 p(t)}\right)\right],$$

$$\frac{d}{dt}p(t) \equiv \dot{p}(t) = \nu_L\left[\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\alpha_i x_i(t)}{p(t)}\right) - \tilde{n}_1 F\left(\frac{\tilde{n}_2\delta_2 x_2(t)}{\tilde{n}_1 p(t)}\right)\right],$$

$$t \in [t_0, T],\ x_i(t_0) = x_i^{(0)},\ i = 1,2,\ p(t_0) = p^{(0)},$$

де x_1 – заощадження працівників реального сектора; x_2 – заощадження власників підприємств; t – неперервна часова змінна, причому $t \in [t_0, T]$, $T > t_0 \geq 0$; p – ціна одиниці агрегованого продукту у секторах L та S; r_L і r_S – зарплати працівників у легальному і тіньовому секторах L та S; k_L і k_S – ставки податку на дохід у легальному і тіньовому секторах L та S; G – функція попиту представника відповідної групи (працівників чи власників) на продукцію легального та тіньового секторів; F – функція випуску продукції (кількість одиниць продукції, що припадає на одного працівника за одиницю часу та відображає принципові закономірності виробництва); $\tilde{n}_1$, $\tilde{n}_2$ – чисельність груп працівників реального сектора та власників підприємств; α_1 та β_1 – частки заощаджень працівників на споживання продукції легального та тіньового секторів економіки відповідно; аналогічно α_2 та β_2 – частки заощаджень власників підприємств; k_L^*, k_L^{**} – податки на фонд заробітної плати та додану вартість у легальному секторі L; k_S^* та k_S^{**} – податки на фонд тіньової заробітної плати та тіньову додану вартість, k_L^* та k_L^{**} – податки на фонд заробітної плати та додану вартість у легальному секторі L; λ_L та λ_S – частки виробничих витрат на одиницю продукції у секторах L та S; δ_2 – частка заощаджень власників на виробничі потреби у легальному секторі L; γ_2 – частка заощаджень власників на виробничі потреби у тіньовому секторі S; ν_L – коефіцієнт інерційності ринку легальної продукції.

Стохастична модель. Формалізуємо стохастичну модель оптимального зв'язку між тіньовою та легальною економіками із використанням вінерівських і пуассонівських процесів. Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ – ймовірнісний простір із σ-алгеброю $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\} \subset \sigma$ із множиною елементарних подій Ω та мірою (ймовірністю) P; $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$ – вектор вінерівських процесів із нульовими математичними сподіванням приростів вінерівських процесів $Md\xi_i(t) = 0$ (d – диференціал) та одиничними дисперсіями приростів $M(d\xi_i(t))^2 = 1$, $i = \overline{1.3}$, причому $\xi_i(t) \in \mathcal{F}_t$, $t \in [t_0, T]$, $i = \overline{1.3}$ [0, п. 1, с. 7-8]; $\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t), \eta_3(t))$ – вектор пуассонівських процесів із математичними сподіванням $M\eta_i(t) = x_i(t - t_0)$, $t \in [t_0, T]$, $i = \overline{1.3}$ [0, п. 1, с. 7].

На ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ задані випадкові процеси $x_1(t) = x_1(t,\omega)$, $x_2(t) = x_2(t,\omega)$, $p(t) = p(t,\omega)$, $\omega \in \Omega$, $t \in [t_0, T]$, які описуються диференціальними рівняннями в формі Іто [0, п. 32, с. 159–164] (d – диференціал):

$$dx_1(t) = p(t)\left[r_L(1-k_L) + r_S(1-k_S) - G\left(\frac{\alpha_1 x_1(t)}{p(t)}\right) - G\left(\frac{\beta_1 x_1(t)}{p(t)}\right)\right]dt +$$

$$+ w_1 d\xi_1(t) + v_1 d\eta_1(t),$$

$$dx_2(t) = \left\{\frac{p(t)}{\tilde{n}_2}(1-k_L)\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\alpha_i x_i(t)}{p(t)}\right) + \frac{p(t)}{\tilde{n}_2}(1-k_S)\times\right.$$

$$\times\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\beta_i x_i(t)}{p(t)}\right) - p(t)G\left(\frac{\alpha_2 x_2(t)}{p(t)}\right) - p(t)G\left(\frac{\beta_2 x_2(t)}{p(t)}\right) -$$

$$-\frac{p(t)}{\tilde{n}_2}\left[\tilde{n}_1 r_L\left(1+k_L^*\right) + \tilde{n}_1\left(\lambda_L + k_L^{**}\right)F\left(\frac{\tilde{n}_2\delta_2 x_2(t)}{\tilde{n}_1 p(t)}\right)\right] -$$

$$-\frac{p(t)}{\tilde{n}_2}\left[\tilde{n}_1 r_S\left(1+k_S^*\right) + \tilde{n}_1\left(\lambda_S + k_S^{**}\right)F\left(\frac{\tilde{n}_2\gamma_2 x_2(t)}{\tilde{n}_1 p(t)}\right)\right]dt +$$

$$+ w_2 d\xi_2(t) + v_2 d\eta_2(t),$$

$$dp(t) = \nu_L\left[\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\alpha_i x_i(t)}{p(t)}\right) - \tilde{n}_1 F\left(\frac{\tilde{n}_2\delta_2 x_2(t)}{\tilde{n}_1 p(t)}\right)\right]dt +$$

$$+ w_3 d\xi_3(t) + v_3 d\eta_3(t),\ t \in [t_0, T], \tag{1}$$

та задовольняє початковим умовам

$$x_1(t_0) = x_1^{(0)} \in \mathcal{F}_{t_0},\ x_2(t_0) = x_2^{(0)} \in \mathcal{F}_{t_0},\ p(t_0) \in \mathcal{F}_{t_0}. \tag{2}$$

Слід зауважити, що похідних у формі Іто не існує, а існують диференціали у формі Іто [0]. Тому стохастична система (1) записана в формі диференціалів. Хоча випадкову систему (1) можна формально записати в формі похідних [0].

На економічні показники α_1, β_1, α_2 накладаються обмеження

$$0 \leq \alpha_i,\ i = 1,2,\ \alpha_1 + \beta_1 \leq 1. \tag{3}$$

За критерій мети візьмемо максимізацію середніх сумарних (інтегральних) заощаджень працівників і підприємців на проміжку часу $[t_0, T]$

$$M\int_{t_0}^{T}\left[x_1(t) + x_2(t)\right]dt \to \max. \tag{4}$$

У математичному плані економіко-математична модель (1)–(4) є задачею стохастичного оптимального керування, в якій керуваннями виступають α_1, β_1, α_2 – частки заощаджень, які йдуть на закупівлю агрегованих продуктів легальної та тіньової економік працівників та власників підприємств, а фазовими траєкторіями є грошові заощадження працівників x_1 та власників підприємств легальних і тіньових економік x_2, ціна одиниці агрегованого продукту p (визнана у секторах L та S).

Проведемо дослідження моделі (1)–(4). Дослідження стохастичної задачі оптимального керування (1)–(4) проведемо із використанням стохастичних достатніх умов оптимальності [0, 0], за якими треба знайти найменше значення функції багатьох змінних у вигляді рівняння (рівняння Беллмана)

$$\inf_{\alpha_i, i=1,2,\beta_1} R\left(t, x_1, x_2, p, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, V\right) \equiv$$

$$\equiv \inf_{\alpha_i, i=1,2,\beta_1} \left\{ \partial V / \partial t + \partial V / \partial x_1 \, p\left[r_L\left(1-k_L\right) + r_S\left(1-k_S\right) - G\left(\frac{\alpha_1 x_1}{p}\right) - G\left(\frac{\beta_1 x_1}{p}\right)\right] + \right.$$

$$+ \partial V / \partial x_2 \left\{ \frac{p}{\tilde{n}_2}\left(1-k_S\right)\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\alpha_i x_i}{p}\right) + \frac{p}{\tilde{n}_2}\left(1-k_S\right)\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\beta_i x_i}{p}\right) - \right.$$

$$- pG\left(\frac{\alpha_2 x_2}{p}\right) - pG\left(\frac{\beta_2 x_2}{p}\right) - \frac{p}{\tilde{n}_2}\left[\tilde{n}_1 r_L\left(1+k_L^*\right) + \tilde{n}_1\left(\lambda_L + k_L^{**}\right)F\left(\frac{\tilde{n}_2\delta_2 x_2}{p}\right)\right] -$$

$$\left. - \frac{p}{\tilde{n}_2}\left[\tilde{n}_1 r_S\left(1+k_S^*\right) + \tilde{n}_1\left(\lambda_S + k_S^{**}\right)F\left(\frac{\tilde{n}_2\gamma_2 x_2}{\tilde{n}_1 p}\right)\right]\right\} +$$

$$+ \partial V / \partial p \, \nu_L \left[\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\alpha_i x_i}{p}\right) - \tilde{n}_1 F\left(\frac{\tilde{n}_2\delta_2 x_2}{\tilde{n}_1 p}\right)\right] +$$

$$+ 0.5W_1^2\, \partial^2 V / \partial x_1 + 0.5W_2^2\, \partial^2 V / \partial x_2 + 0.5W_3^2\, \partial^2 V / \partial p +$$

$$+ \chi_1\left[V\left(t, x_1+\nu_1, x_2, p\right) - V\left(t, x_1, x_2, p\right)\right] +$$

$$+ \chi_2\left[V\left(t, x_1, x_2+\nu_2, p\right) - V\left(t, x_1, x_2, p\right)\right] +$$

$$\left. + \chi_3\left[V\left(t, x_1, x_2, p+\nu_3\right) - V\left(t, x_1, x_2, p\right)\right] - \left(x_1 + x_2\right)\right\} = 0 , \quad (5)$$

де $V\left(t, x_1, x_2, p\right)$ – невідома неперервно-диференційована функція один раз по t та двічі по x_1, x_2, p на декартовому добутку $\left[t_0, T\right] \times \left\{x_1 \ge 0\right\} \times \left\{x_2 \ge 0\right\} \times \left\{p \ge 0\right\}$ і яку будемо шукати у вигляді

$$V\left(t, x_1, x_2, p\right) = \ell_1 x_1 + x_2 + \ell_2 p , \quad (6)$$

де ℓ_i, $i = \overline{1.3}$ – сталі, які підлягають визначенню.

Підставимо (6) у рівняння Беллмана (5). Запишемо необхідні умови оптимальності функції R по α_1, β_1 – рівність нулеві частинних похідних першого порядку

$$-\frac{\ell_1}{p} + \frac{\tilde{n}_1}{\tilde{n}_2}\left(1-k_L\right) + \frac{\ell_2\tilde{n}_1}{p} = 0 ,$$

$$-\frac{\ell_1}{p} + \frac{\tilde{n}_1}{\tilde{n}_2}\left(1-k_S\right) = 0 , \quad (7)$$

Із другого рівняння системи (7) визначаємо допоміжну оптимізаційну величину p

$$p = p_{gon} = \frac{\ell_1\tilde{n}_2}{\tilde{n}_1\left(1-k_S\right)} . \quad (8)$$

Оскільки ℓ_1 та ℓ_2 – сталі, то $p_{gon} = const$ (стала) відповідно

$$\frac{dp_{gon}}{dt} = 0 . \quad (9)$$

Підставимо (8) у перше та третє рівняння системи (7), знаходимо сталу ℓ_2:

$$\ell_2 = \frac{k_S - k_L}{\left(1-k_S\right)\nu_L\tilde{n}_1} . \quad (10)$$

Підставимо (8) і (10) у рівняння Беллмана (5):

$$\ell_1 p\left[\left(1-k_L\right)r_L + \left(1-k_S\right)r_S - G\left(\frac{\alpha_1 x_1}{p}\right) - G\left(\frac{\beta_1 x_1}{p}\right)\right] +$$

$$+ \frac{p}{\tilde{n}_2}\left(1-k_L\right)\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\alpha_i x_i}{p}\right) + \frac{p}{\tilde{n}_2}\left(1-k_S\right)\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\beta_i x_i}{p}\right) -$$

$$- pG\left(\frac{\alpha_2 x_2}{p}\right) - pG\left(\frac{\beta_2 x_2}{p}\right) - \frac{p}{\tilde{n}_2}\left[\tilde{n}_1 r_L\left(1+k_L^*\right) + \tilde{n}_1\left(\lambda_L + k_L^{**}\right)F\left(\frac{\tilde{n}_2\delta_2 x_2}{\tilde{n}_1 p}\right)\right] -$$

$$\left. - \frac{p}{\tilde{n}_2}\left[\tilde{n}_1 r_S\left(1+k_S^*\right) + \tilde{n}_1\left(\lambda_S + k_S^{**}\right)F\left(\frac{\tilde{n}_2\gamma_2 x_2}{\tilde{n}_1 p}\right)\right]\right\} +$$

$$+ \ell_2\nu_L\left[\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\alpha_i x_i}{p}\right) - \tilde{n}_1 F\left(\frac{\tilde{n}_2\delta_2 x_2}{\tilde{n}_1 p}\right)\right] - \left(x_1 + x_2\right) +$$

$$+ \chi_1\ell_1\nu_1 + \chi_2\nu_2 + \chi_3\ell_2\nu_3 = 0 . \quad (11)$$

Це рівняння має чотири невідомих. Ступінь вільності дорівнює (4-1=3) трьом та який будемо заповнювати трьома рівняннями формально середньої системи (1) при (9) $\left(\dfrac{dp}{dt} = 0\right)$ та початкових умовах (2)

$$\frac{d}{dt}x_1 = p\left[r_L\left(1-k_L\right) + r_S\left(1-k_S\right) - G\left(\frac{\alpha_1 x_1(t)}{p}\right) - G\left(\frac{\beta_1 x_1(t)}{p}\right)\right] + \nu_1\chi_1,$$

$$\frac{d}{dt}x_2(t) = \frac{p}{\tilde{n}_2}\left(1-k_L\right)\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\alpha_i x_i(t)}{p}\right) + \frac{p(t)}{\tilde{n}_2}\left(1-k_S\right) \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\beta_i x_i(t)}{p}\right) - pG\left(\frac{\alpha_2 x_2(t)}{p}\right) - pG\left(\frac{\beta_2 x_2(t)}{p}\right) -$$

$$- \frac{p}{\tilde{n}_2}\left[\tilde{n}_1 r_L\left(1+k_L^*\right) + \tilde{n}_1\left(\lambda_L + k_L^{**}\right)F\left(\frac{\tilde{n}_2\delta_2 x_2(t)}{\tilde{n}_1 p}\right)\right] -$$

$$- \frac{p}{\tilde{n}_2}\left[\tilde{n}_1 r_S\left(1+k_S^*\right) + \tilde{n}_1\left(\lambda_S + k_S^{**}\right)F\left(\frac{\tilde{n}_2\gamma_2 x_2(t)}{\tilde{n}_1 p}\right)\right] + \chi_2\nu_2 ,$$

$$0 = \nu_L\left[\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i G\left(\frac{\alpha_i x_i(t)}{p}\right) - \tilde{n}_1 F\left(\frac{\tilde{n}_2\delta_2 x_2(t)}{\tilde{n}_1 p}\right)\right] + \chi_3\nu_3 ,$$

$$x_1\left(t_0\right) = Mx_1^{(0)} , \; x_2\left(t_0\right) = Mx_2^{(0)} . \quad (12)$$

Слід зауважити, що система (12) формально отримано при знаходженні математичного сподівання від лівих і правих частин диференціальних рівнянь (1) та початкових умовах (2) із використанням рівностей:

$$Md\xi_i(t) = dM\xi_i(t) = 0 ,$$

$$Md\eta_i(t) = dM\eta_i(t) = d\left(\chi_i\left(t-t_0\right)\right) = \chi_i , \; i = \overline{1.3} .$$

Алгебраїчно-диференціальну систему рівнянь (11)–(12) можна розв'язати сумісним використанням метода Рунге-Кутта [0, розділ 6, § 2, с. 167–176] нелінійних алгебраїчних рівнянь [0, розділ 3, § 8, с. 278 – 296].

У результаті розв'язання системи (11)–(12) отримаємо детерміновані оптимальні керування $\alpha_1^{(ОП)}(t)$ і $\beta_1^{(ОП)}(t)$, $t \in \left[t_0, T\right]$, які не залежать від коефіцієнтів при вінерівських процесах випадкової динамічної системи (1). Вибором сталої ℓ_1 можна домогтися виконання нерівності $0 \le \alpha_1^{(ОП)}(t)$, $\beta_1^{(ОП)}(t)$, $\alpha_1^{(ОП)}(t) + \beta_1^{(ОП)}(t) \le 1$, $t \in \left[t_0, T\right]$.

Відповідні стохастичні (випадкові) оптимальні траєкторії $x_1^{(ОП)}(t)$, $x_2^{(ОП)}(t)$, $p_{ОП}(t)$, $t \in \left[t_0, T\right]$ можна знайти аналогом метода Рунге-Кутта [0] із стохастичної початкової задачі (1)–(2). А середні оптимальні траєкторії одержимо як $x_1^{(C,ОП)}(t) = Mx_1^{(ОП)}(t)$, $x_2^{(C,ОП)}(t) = Mx_2^{(ОП)}(t)$, $x_3^{(C,ОП)}(t) = Mx_3^{(ОП)}(t)$, $t \in [t_0, T]$.

У результаті чого, отримаємо стохастичний і середній оптимальний процес:

$$\left\{x_1^{(ОП)}(t), x_2^{(ОП)}(t), p_{ОП}(t), \alpha_1^{(ОП)}(t), \alpha_1^{(ОП)}(t), \beta_1^{(ОП)}(t)\right.,$$

$$t \in [t_0, T].$$

Отже, одержали стохастичний і середній процес (розв'язок) стохастичної моделі оптимального зв'язку між тіньовою та легальною економіками.

Висновки. Запропонована стохастична модель оптимального зв'язку між тіньовою та легальною економіками із допомогою вінерівських і пуассонівських процесів та проведено її дослідження в плані одержання стохастичного та середнього оптимального процесу. Описана структура оптимального процесу запропонованої стохастичної моделі. Встановлено, що оптимальні керування є детермінованими величинами та не залежать від коефіцієнтів при вінерівських процесів у запропонованій стохастичній динамічній моделі. Варто також відзначити, що конкретне формулювання цієї задачі оптимального керування взаємодії між тіньовою та легальною економіками залежить від контексту дослідження і може змінюватися в залежності від встановлених завдань та припущень. Зокрема, вище описана методика справедлива і для моделі (1), (2), (4), якщо вибрати для керування такі змінні: а) α_1, α_2 із обмеженнями $0 \le \alpha_1 \le 1 - \beta_1$, $0 \le \alpha_2 \le 1 - \delta_2 - \gamma_2 - \beta_2$ (α_1 – частка заощаджень працівників на споживання продукції легального сектора, α_2 – частка заощаджень власників підприємств на споживання продукції легального сектора економіки); б) β_1, α_2 із обмеженнями $0 \le \beta_1 \le 1 - \alpha_1$, $0 \le \alpha_2 \le 1 - \delta_2 - \gamma_2 - \beta_2$ (β_1 – частка заощаджень працівників на споживання продукції тіньового сектора економіки, α_2 – частка заощаджень власників підприємств на споживання продукції легального сектора економіки) тощо. Отже, основна ідея процесу розв'язання оптимальної задачі керування враховуються як сам процес керування (стратегії, методи управління), так і шляхи, якими рухається система від початкового стану до кінцевого результату (фазові траєкторії).

Побудова та дослідження моделей взаємозв'язків між тіньовою та легальною економікою є складними завданнями, які вимагають належних даних, урахування різноманітних аспектів та вимагає індивідуального підходу для кожного дослідження.

Список використаних джерел:

1. Feige E.L. Reflections on the meaning and measurement of Unobserved Economies: What do we really know about the «Shadow Economy»? *Journal of Tax Administration*. 2016. Vol. 1. No. 50. URL: https://mpra.ub.uni-muenchen.de/68466/ (дата звернення: 19.04.2024).
2. Schneider F. Enste D. Shadow Economies: Size, Causes, and Consequences. *Journal of Economic Literature*. 2000. Vol. 38. No. 1. P. 77–114. URL: https://www.aeaweb.org/articles?id=10.1257/jel.38.1.77 (дата звернення: 20.04.2024).
3. Wu D.F., Schneider F. Nonlinearity between the Shadow Economy and Level of Development. *IMF Working Paper*. 2019. 29 p. URL: https://www.imf.org/en/Publications/WP/Issues/2019/03/01/Nonlinearity-Between-the-Shadow-Economy-and-Level-of-Development-46618 (дата звернення: 20.04.2024).
4. Tanzi J.V. The underground economy in the United States: annual estimates: 1930–1980. *IMF Staff Papers.* 1983. Vol. 30. No. 2. P. 283–305. URL: https://www.elibrary.imf.org/view/journals/024/1983/002/article-A002-en.xml (дата звернення: 15.04.2024).
5. Вінничук І.С. Моделювання процесів функціонування легального та тіньового секторів економіки : дис. ... канд. екон. наук : 08.00.11 Київ, 2015. 267 с.
6. Вінничук І.С. Модель взаємодії легальної та тіньової економік з розширеною економічною структурою суспільства. *Інноваційна економіка*. 2012. Вип. 12 (38). С. 54–58.
7. Вінничук І.С., Вінничук О.Ю. Моделювання тіньової економічної діяльності. *Науковий вісник Чернівецького національного університету : Збірник наук. праць.* 2016. Вип. 773-774. Економіка. С. 171–177.
8. Вінничук І.С., Бойчук М.В., Вінничук О.Ю. Моделювання оптимальних зв'язків між тіньовою та легальною економіками. *Приазовський економічний вісник.* 2023. Вип. 3(35). С. 68–75.
9. Скроход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів. Київ : Либідь, 1991. 168 с.
10. Григорків В.С. Оптимальне керування в економіці. Чернівці, 2011. 200 с.
11. Optimal control. URL: http://www.scholarpedia.org/article/Optimal_control (дата звернення: 25.01.2024).
12. Ясинський В.К. Основи обчилювальних методів. Чернівці : «Золоті литаври», 2005. 396 с.
13. Юрченко І.В., Ясинський Л.І., Ясинський В.К. Методи стохастичного моделювання систем. Чернівці : «Прут», 2002. 416 с.

Reference:

1. Feige E. L. (2016) Reflections on the meaning and measurement of Unobserved Economies: What do we really know about the "Shadow Economy"? *Journal of Tax Administration*, vol. 1, no. 50 p. Available at: https://mpra.ub.uni-muenchen.de/68466/ (accessed April 19, 2024).
2. Schneider, F. & Enste, D. (2000) Shadow Economies: Size, Causes, and Consequences. *Journal of Economic Literature*, vol. 38, no. 1, pp. 77–114. Available at: https://www.aeaweb.org/articles?id=10.1257/jel.38.1.77 (accessed April 20, 2024).
3. Wu D. F., Schneider F. (2019) Nonlinearity between the Shadow Economy and Level of Development. *IMF Working Paper*, 29 p. Available at: https://www.imf.org/en/Publications/WP/Issues/2019/03/01/Nonlinearity-Between-the-Shadow-Economy-and-Level-of-Development-46618 (accessed April 20, 2024).
4. Tanzi J. V. (1983) The underground economy in the United States: annual estimates: 1930–1980. *IMF Staff Papers,* vol. 30, no. 2, pp. 283–305. Available at: https://www.elibrary.imf.org/view/journals/024/1983/002/article-A002-en.xml (accessed April 15, 2024).

5. Vinnychuk I. S. (2015) Modeljuvannja procesiv funkcionuvannja leghaljnogho ta tinjovogho sektoriv ekonomiky [Modelling the functioning of the legal and shadow sectors of the economy] (PhD Thesis), Kyiv: International Research and Training Centre for Information Technologies and Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine and the Ministry of Education and Science of Ukraine.

6. Vinnychuk I. S. (2012) Modelj vzajemodiji leghaljnoji ta tinjovoji ekonomik z rozshyrenoju ekonomichnoju strukturoju suspiljstva [A model of interaction between the legal and shadow economies and the broader economic structure of society]. *Innovacijna ekonomika*, vol. 12 (38), pp. 54–58.

7. Vinnychuk I. S., Vinnychuk O. Yu. (2016) Modeliuvannia tinhovoi ekonomichnoi diialnosti [Modelling shadow economic activity]. *Scientific Bulletin of Chernivtsi National University,* vol. 773-774, pp. 171–177.

8. Vinnichuk I. S., Boichuk M. V., Vinnichuk O. Yu. (2023) Modeliuvannia optymalnykh zviazkiv mizh tinovoiu ta legalnoiu ekonomikami [Modelling optimal links between the shadow and legal economies]. *Priazovsky Economic Bulletin,* vol. 3(35), pp. 68–75.

9. Skrokhod A. V. (1991) Lektsii z teorii vipadkovykh protsesiv [Lectures on the theory of random processes]. Kyiv: Lybid. 168 p. (in Ukrainian)

10. Hryhorkiv V. S. (2011) Optymaljne keruvannja v ekonomici [Optimal management in the economy]. ChernIvetskiy nats. un-t. (in Ukrainian)

11. Optimal control Available at: http://www.scholarpedia.org/article/Optimal_control (accessed January 25, 2024).

12. Yasynsky V. K. (2005) Osnovy obchysljuvaljnykh metodiv [Fundamentals of computational methods]. Chernivtsi: Zoloti Lytavry. (in Ukrainian)

13. Yurchenko I. V., Yasinskyi L. I., Yasinskyi V. K. (2002) Metody stokhastychnoho modeliuvannia system [Methods of stochastic modelling of systems]. Chernivtsi: Prut, 416 p. (in Ukrainian)