МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 330.101:542.075.8
DOI: https://doi.org/10.32782/business-navigator.72-24

Бойчук М.В.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри економіко-математичного моделювання
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Вінничук О.Ю.
кандидат економічних наук, доцент,
доцент кафедри економіко-математичного моделювання
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Скращук Л.В.
кандидат економічних наук, асистент,
асистент кафедри економіко-математичного моделювання
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Boychuk Myroslav
Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Economic and Mathematical Modelling
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

Vinnychuk Olena
Candidate of Sciences (Economics), Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Economic and Mathematical Modelling
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

Skrashchuk Larysa
Candidate of Sciences (Economics), Assistant,
Assistant of the Department of Economic and Mathematical Modelling
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

ТЕХНОЛОГІЯ ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОПРОДУКТОВОЇ МАКРОЕКОНОМІКИ ЗРОСТАННЯ

Бойчук М.В., Вінничук О.Ю., Скращук Л.В. Технологія використання теорії оптимального керування для моделювання однопродуктової макроекономіки зростання. В статті запропоновано технологія використання теорії оптимального керування для моделювання однопродуктової макроекономіки зростання. Для моделювання однопродуктової макроекономіки зростання сформульовано технологічні задачі, які можуть бути початковими (на початку протікання процесу виробництва), серединними на протязі всього терміну протікання процесу та кінцевими – на кінцевому стані виробництва продукції. Для побудови моделі оптимального макроекономічного зростання враховано ряд припущень, зокрема валова продукція розкладається на кінцеву продукцію та виробниче споживання, виробниче споживання прямопропорційне валовій продукції, кінцева продукція розкладається на невиробниче споживання, на загальні інвестиції, на урядові витрати, на оподаткування, на ліквідацію забруднення та на сальдо (експорт мінус імпорт). Для побудови оптимального процесу, де керуванням виступає норма споживання, а фазовою траєкторією – питомий капітал, формалізовано цільову функцію (критерій мети), яка максимізує середнє (інтегральне) дисконтоване споживання за визначений відрізок часу. Для дослідження моделі оптимального керування використано достатні умови оптимальності, а для урахування обмеження на мінімальне споживання – метод Лагранжа, за яким задача на умовну оптимізацію зводиться до задачі безумовної оптимізації – оптимізації двох функцій багатьох змінних.

Ключові слова: макроекономіка зростання, моделі економічного зростання, теорія оптимального керування, модель оптимального керування, достатні умови оптимальності, оптимальний процес.

Boychuk Myroslav, Vinnichuk Olena, Skratchuk Larysa. Technology of using optimal control theory for modelling single-product macroeconomic growth. Research in macroeconomic growth remains extremely relevant and important in the modern world. Macroeconomic growth focuses on analysing the dynamics of production, income, and consumption, enabling the development of scenarios for long-term development. The technology of using the theory of optimal control for modelling single-product growth macroeconomics plays an important role in understanding and forecasting economic development. The article proposes a technology for using the theory of optimal control to model a single-product growth macroeconomy. Technological tasks for modelling single-product macroeconomic growth are formulated, which can be initial (at the beginning of the production process), intermediate throughout the entire duration of the process, and final at the end state of production. In order to construct a model of optimal macroeconomic growth, several assumptions are taken into account. Specifically, gross output is decomposed into final output and production consumption. Production consumption is assumed to be proportional to gross output. Final output is further divided into non-production consumption, total investment, government expenditure, taxation, pollution abatement, and balance of trade (exports minus imports). To build the optimal process, where consumption rate acts as the control variable and specific capital represents the phase trajectory, a target function (goal criterion) is formalized. The target function aims to maximize the average (integral) discounted consumption over a specified time interval. Sufficient optimality conditions are used to investigate the model of optimal control. The Lagrange method is employed to account for the constraint on minimum consumption. This allows transforming the constrained optimization problem into an unconstrained optimization problem involving the optimization of two functions with multiple variables. During the investigation of the single-product macroeconomic growth model, an algorithm has been developed to calculate the optimal process for three formulated technological tasks under selected three-tier regimes. Among the built optimal processes, it is possible to select a priority optimal process.

Key words: macroeconomics of growth, economic growth models, theory of optimal control, model of optimal control, sufficient conditions for optimality, optimal process.

Постановка проблеми. Дослідження макроекономіки зростання включає вивчення факторів, які визначають темпи та структуру економічного зростання, а також вплив різних політик, інституцій та технологій на економічний розвиток. Макроекономіка зростання зосереджена на аналізі динаміки виробництва, доходів та споживання, що дозволяє розробляти сценарії розвитку у довгостроковій перспективі. Відомі економісти теорії макроекономіки зростання не претендували на створення всеохоплюючої та універсальної методології дослідження, тому кожна теорія або модель мають відповідні передумови та абстракції, які дозволяють виділити ту чи іншу технологію дослідження. Наукові дискусії дослідження макроекономіки зростання і досі продовжуються, що вимагає використання знань з інших наук. Тому актуальним є розробка технології використання теорії оптимального керування, наприклад, для однопродуктового виробництва на макрорівні економіки зростання.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Моделювання та дослідження макроекономічного зростання є складним процесом, що вимагає використання різних підходів та методик. Моделі макроекономічного зростання займають значне місце в економіко-математичних дослідження та дозволяють розробляти сценарії економічного розвитку країни, враховуючи різні чинники. Теорія оптимального керування є потужним інструментом для моделювання та аналізу макроекономічного зростання. Цей підхід дозволяє визначити оптимальні стратегії управління, які максимізують показники економічного зростання, враховуючи обмеження та умови моделі. Григорків В.С. у [1] виклав основи теорії оптимального керування та її застосування при дослідженні економіко-математичних моделей, а у [2, с. 233] описав моделі рамсеївського типу та моделі оптимального керування. Прийнято вважати, що сформульована Рамсеєм задача є першим прикладом застосування теорії динамічної оптимізації в економіці. Різні обмеження та умови задач оптимального керування дозволяють будувати різні моделі. Зокрема, модель зростання Рамсея-Касса-Купманса (RCK) досліджує зростання економіки, враховуючи взаємодію між капіталом, працею та технологічним прогресом. Застосовуючи теорію оптимального керування до цієї моделі, можна визначити оптимальні шляхи збільшення капіталовкладень та розподілу ресурсів для досягнення максимального рівня економічного зростання [3]. У дослідженнях макроекономічного зростання також використовують стохастичні моделі, які дозволяють враховувати невизначеність та випадкові фактори, що впливають на економічне зростання. Зокрема, таку технологію автори розкривають у працях [4–6].

У роботі [7] проведена спроба до створення технології використання теорії оптимального керування для моделювання однопродуктової макроекономіки зростання із урахуванням екологічного фактора. При цьому із допомогою достатніх умов оптимальності визначені керування, які характеризують певні економічні режими та описані алгоритми побудови багатоярусних оптимальних процесів. У роботах [8; 9] при моделюванні оптимальної стратегії багатопродуктової фірми на ринку товарів визначались керування, яким відповідають певні економічні режими та із допомогою цих режимів формувались багатоярусні режими, для яких визначались багатоярусні оптимальні процеси.

Постановка завдання дослідження. Метою статті є розробка технології використання теорії оптимального керування, наприклад, для моделювання однопродуктової макроекономіки зростання. Для досягнення поставленої мети слід виконати весь процес розробки такої технології: визначення моделі, формалізація цільової функції, формулювання обмежень, побудова оптимальної стратегії управління та розробка алгоритму побудови оптимального процесу.

Виклад основного матеріалу дослідження. Розробка технології використання теорії оптимального керування для моделювання однопродуктової макроекономіки зростання може бути складним завданням, що вимагає детального аналізу та математичного моделювання.

Нехай виробляється один агрегований продукт на макрорівні із розширенням виробництва. Цей продукт виробляється при певних технологічних умовах, які бувають початковими (на початку протікання процесу виробництва), серединними на протязі всього терміну протікання процесу та кінцевими – на кінцевому стані виробництва продукції. Для моделювання однопродуктової макроекономіки зростання сформулюємо деякі можливі технологічні задачі.

Технологічна задача І. Початкова технологічна умова. До початку протікання процесу виробництва виготовленої продукції вдосталь та для протікання виробництва необхідне мінімальне споживання, тому треба визначити термін мінімального споживання при протіканні процесу виробництва.

Серединна технологічна умова. Обмеження на мінімальне споживання із деякого моменту часу протікання процесу виробництва, тому цей деякий момент часу треба визначити.

Кінцева технологічна умова. Кінцевий стан капіталу повинен бути не меншим за задану величину такий, щоб за терміном горизонту планування продукції споживалось не менше заданої величини.

Технологічна задача ІІ. Початкова технологічна умова. До початку протікання процесу виробництва виник дефіцит виготовленої продукції та для протікання виробництва необхідне найбільше (максимальне) споживання, тому виникає задача визначення терміну найбільшого (максимального) споживання при протіканні процесу виробництва.

Серединна технологічна умова. Обмеження на мінімальне споживання на всьому інтервалі протікання процесу виробництва.

Кінцева технологічна умова. Кінцевий стан капіталу повинен бути не меншим за задану величину та такий, щоб за горизонтом планування продукції споживалось не менше заданої величини.

Технологічна задача ІІІ. Початкова технологічна умова. На початку протікання процесу виробництва процеси споживання та накопичення капіталу відбувались одночасно.

Серединна технологічна умова. До невідомого моменту часу (треба визначити) відбувається обмеження на задане мінімальне споживання, а із цього невідомого моменту часу – обмеження на задане відношення споживання до інвестицій.

Кінцева технологічна умова. На кінцевий стан капіталу накладається обмеження (знизу) та таке, щоб за горизонтом планування продукцій споживалось не менше заданої величини (обмеження знизу). Зауважимо, що можливі інші технологічні задачі із певними технологічними умовами.

Перейдемо від формалізацій технологічних задач до їх опису на економіко-математичній мові. Рівняння руху питомого капіталу $k(t)$ (фондоозброєності $k = K/L$ на одного працюючого) у момент часу $t\in[t_0,T]$ ($t_0 \geq 0$ – початковий часовий момент, $T > t_0$ – кінцевий момент часу та момент горизонту планування) набуває вигляду [7, с. 27–33] при повній завантаженості сектора (валова продукція $x(t) = X(t)/L(t) = L_0^{\nu-1} e^{(\nu-1)n(t-t_0)} f(k(t))$),

$$\dot{k}(t) = -(\mu+n)k(t) + (1-a)(1-b)\left[1-s(t)\right] L_0^{\nu-1} e^{(\nu-1)n(t-t_0)} f(k(t)),\quad t\in[t_0,T], \tag{1}$$

де K – капітал; $L(t) = L_0 e^{n(t-t_0)}$ – рух робочої сили у момент часу t, L_0 – початковий стан робочої сили, $n > 0$ – темп зростання робочої сили; $\mu\in(0,1)$ – норма амортизації капіталу, α – коефіцієнт пропорційності виробничого споживання W до валової продукції X, валова продукція складає кінцеву продукцію Y та виробниче споживання W ($X = Y + W$), b – коефіцієнт пропорційності сумарних урядових витрат U_r, оподаткування O_p, витрат на боротьбу із забрудненням Z та сальдо $S_a = E_x - I_m$ (E_x – експорт, I_m – імпорт) до кінцевого випуску продукції Y; $s\in[0,1]$ – норма споживання як коефіцієнт пропорційності невиробничого споживання □ до кінцевої продукції $(1-b)Y$, причому $C + I = (1-b)Y$, I – валові інвестиції. Питома макровиробнича функція [7, с. 32] $f(k\geq 0)$ із властивостями: неперервна, монотонно зростаюча, двічі неперервно-диференційована та увігнута (опукла вверх) при $k \geq 0$ і $f(0) = 0$, причому макровиробнича функція $F(K,L) = L^{\nu} f(k)$, ν – степінь однорідності функції F із властивістю $F(\chi K, \chi L) = \chi^{\nu} F(K,L)$ для всіх $\chi > 0$, $\nu\in(0,2)$. Функція $F(K,L)$ із властивостями [7, с. 8–9]: неперервна, двічі неперервно-диференційовна, увігнута (опукла вверх) по кожному із аргументів та однорідна степеня $\nu\in(0,2)$.

Питома валова продукція $x(t) = X(t)/L(t)$, невиробниче споживання *C*, валові інвестиції *I*, кінцевий випуск продукції Y та валова продукція *X* мають такі залежності [7, с. 31–33]:

$$\begin{gathered} C(t) = (1-a)(1-b)s(t) L_0^{\nu} e^{\nu n(t-t_0)} f(k(t)), \\ I(t) = (1-a)(1-b)\left[1-s(t)\right] L_0^{\nu} e^{\nu n(t-t_0)} f(k(t)), \\ Y(t) = L_0^{\nu} e^{\nu n(t-t_0)} f(k(t)),\ \dot{X}(t) = L_0^{\nu} e^{\nu n(t-t_0)} f(k(t)). \end{gathered} \tag{2}$$

Відомий (заданий) початковий стан капіталу

$$k(t_0) = k_0. \tag{3}$$

На норму споживання s накладається обмеження

$$0 \leq s(t) \leq 1,\ t\in[t_0,T]. \tag{4}$$

Задається обмеження на мінімальне споживання

$$C(t) = (1-a)(1-b)s(t) L_0^{\nu} e^{\nu n(t-t_0)} f(k(t)) \geq C_0 \equiv const > 0,\ t\in[t_0,T], \tag{5}$$

а також обмеження на кінцевий стан капіталу $k(T)$ і на кінцевий стан споживання $C(T)$

$$k(T) \geq k_T,\ C(T) \geq C_T. \tag{6}$$

Критерієм мети виступає максимізація середнього (інтегрального) дисконтованого споживання за відрізок часу $[t_0,T]$

$$\int_{t_0}^{T} e^{\delta t} C(t)\,dt = \int_{t_0}^{T} (1-a)(1-b) L_0^{\nu} s(t) e^{\nu n(t-t_0)} f(k(t))\,dt \to \max_{0\leq s(t)\leq 1}, \tag{7}$$

де $\delta > 0$ – норма дисконту.

Отримали економіко-математичну модель однопродуктової макроекономіки зростання (1), (3)-(7), яка в математичному плані є задачею оптимального керування, зміст якої полягає в тому, щоб побудувати процес, який є допустимим і максимізує (7), де керуванням виступає норма споживання *s*, а фазовою траєкторією – питомий капітал *k*. Проведемо дослідження економіко-математичної моделі (1), (3)-(7).

Для дослідження моделі (1), (3)-(7) використаємо достатні умови оптимальності [7, с. 15], а для урахування обмеження (5) метод Лагранжа [1, с. 78], за яким задача на умовну оптимізацію зводиться до задачі безумовної оптимізації – оптимізації двох функцій багатьох змінних:

$$R(t,s,k,V,\lambda) \equiv \partial V/\partial t + \partial V/\partial k\Big[-(\mu+n)k + (1+-a)(1-b)L_0^{\nu-1} \times$$
$$\times(1-s)e^{(\nu-1)n(t-t_0)}f(k)\Big] + (1-a)(1-b)L_0^{\nu}se^{\nu n(t-t_0)-\delta(t-t_0)}f(k) + \quad (8)$$
$$+\lambda\Big[C_0-(1-a)(1-b)L_0^{\nu}se^{\nu n(t-t_0)}f(k)\Big] \to \max_{s,k,\lambda},$$

$$\Phi(T,k) = \min_{k\ge k_T} V(T,k), \quad (9)$$

де $V(t,k)$ – невідома неперервно-диференційована функція на декартовому добутку $[t_0,T]\times\{k\ge 0\}$, λ – множник Лагранжа.

Запишемо необхідну умову оптимальності функції R за λ – рівність нулеві частинної похідної першого порядку від R за λ, тобто за $\partial R/\partial\lambda = 0$, одержуємо рівняння

$$C_0-(1-a)(1-b)L_0^{\nu}s(t)e^{\nu n(t-t_0)}f(k)=0,\ t\in[t_0,T], \quad (10)$$

яке пізніше буде використано для визначення моментів перемикання керувань.

Із урахуванням (10) функція R є лінійною за керуванням s, а тому найбільшого значення R отримує при

$$s^* = \begin{cases} 0, -\partial V/\partial k + L_0e^{(n-\delta)(t-t_0)} > 0, \\ 1, -\partial V/\partial k + L_0e^{(n-\delta)(t-t_0)} < 0, \\ \textit{довільне із } [0,1], -\partial V/\partial k + L_0e^{(n-\delta)(t-t_0)} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Розглянемо випадок $-\partial V/\partial k + L_0e^{(n-\delta)(t-t_0)} = 0$, після інтегрування якого одержимо

$$V(t,k) = L_0e^{(n-\delta)(t-t_0)}k,\ t\in[t_0,T] \quad (12)$$

та підставимо (12) у функцію R, отримаємо таку задачу оптимізації

$$-(\mu+\delta)k+(1-a)(1-b)L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)n(t-t_0)}f(k)\to\max_k. \quad (13)$$

Оскільки функція $f(k)$ має властивості: $f(0)=0$, двічі неперервно-диференційована та увігнута (опукла вверх), то при кожному фіксованому t задача оптимізації має розв'язок $k_{OB}\in(0,\tilde{k})$, де k є при кожному t розв'язком рівняння $(1-a)(1-b)L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)n(t-t_0)}f(k)=(\mu+\delta)k$.

Величина k_{OB} визначається із необхідної умови оптимальності для задачі оптимізації (13), тобто рівняння

$$(\mu+\delta)=(1-a)(1-b)L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)n(t-t_0)}f(k). \quad (14)$$

Оптимізаційна величина k_{OB} є неперервно-диференційованою функцією та визначається одним із чисельних методів розв'язування нелінійних рівнянь [10] із (14).

Зауважимо, що при залежності Кобба-Дугласа для макровиробничої функції $(\nu-1)F(K,L)=LF\left(K/L,1\right)=Lf(k)=Lk^{\alpha},\quad \alpha\in(0,1)$ оптимізаційна величина $k_{OB}=const$ є постійною величиною та не залежить від часу t. Функція $V(t,k)$ при $t=T$ із (12) є монотонно спадною за k, а тому оптимізаційна задача (9) має розв'язком

$$k(T)=k_T. \quad (15)$$

Відповідне керування s_{OB} за $k_{OB}(t)$, $t\in[0,T]$ визначається із рівняння руху капіталу та має вигляд:

$$s_{OB}(t)=1-\Big[\dot{k}_{OB}(t)+(\mu+n)k_{OB}(t)\Big](1-a)^{-1}(1-b)^{-1}L_0^{1-\nu}e^{(1-\nu)n(t-t_0)}f^{-1}(k_{OB}),$$

а відповідно s_{OB} повинно приймати значення не виходячи із відрізка $[0,1]$. Причому k_{OB} визначається диференціюванням лівої та правої частини $\dot{k}(t)=-(\nu-1)nf(k)$. Тому необхідне керування s_{HK} набуває вигляду

$$s_{HK}(t)=\begin{cases} 0,\ s_{OB}(t)\le 0, \\ 1,\ s_{OB}(t)\ge 1, \\ s_{HK}(t), 0<s_{OB}(t)\le 1, \end{cases} \quad t\in[0,T]. \quad (16)$$

Оптимальна норма споживання (11) визначається як:

$$s^*(t)=\begin{cases} 0,\ \partial V/\partial k + L_0e^{(n-\delta)(t-t_0)} > 0, \\ 1,\ \partial V/\partial k + L_0e^{(n-\delta)(t-t_0)} < 0, \\ s_{HK}(t), \partial V/\partial k + L_0e^{(n-\delta)(t-t_0)} = 0, \end{cases} \quad t\in[0,T]. \quad (17)$$

Таким чином, задача оптимального керування (1), (3)-(4), (7) має три керування – три технологічні режими:

$s^*(t)=0$ – технологічний режим відсутності споживання, а повністю відбувається накопичення капіталу (режим «відсутнє»);

$s^*(t)=1$ – технологічний режим повністю споживання та відсутності накопичення капіталу (режим «повне»);

$s^*(t)=s_{HK}(t)=s_r(t)$ – технологічний режим часткового споживання і споживання та накопичення капіталу (режим «часткове»).

Із цих трьох технологічних режимів можна формувати багатоярусні технологічні режими $(q\ge 2)$:

– двоярусні $(q=2)$, наприклад, «відсутнє + часткове», «повне + часткове», «часткове + часткове 1» (для технологічної задачі III) та інші;

– триярусні $(q=3)$, наприклад, «відсутнє + часткове + часткове 2», «повне + часткове + часткове 2», «часткове + часткове 1 + часткове 2» (для технологічної задачі III) та інші;

– багатоярусні $(q\ge 4)$, наприклад, чотириярусний «відсутнє + часткове + повне + часткове 2» та «часткове + часткове 1 + відсутнє + часткове 2», п'ятиярусний «часткове + часткове 1 + повне + часткове + часткове 2» та інші.

Конкретизуємо технологічні режими «часткове 1» та «часткове 2».

«Часткове 1». У технологічній задачі III в серединній технологічній умові задається відношення споживання до інвестицій $C/I=\upsilon_{за}$ та із урахуванням залежностей (2) маємо

$$\frac{C}{I}=\frac{(1-a)(1-b)L_0^{\nu}se^{\nu n(t-t_0)}f(k)}{(1-a)(1-b)L_0^{\nu}(1-s)e^{\nu n(t-t_0)}f(k)}=\upsilon_{за},$$

звідки знаходимо керування s_{r1}

$$s_{r1}=\frac{\upsilon_{за}}{1+\upsilon_{за}}, \quad (18)$$

що відповідає режиму «часткове1».

«Часткове 2». У всіх трьох технологічних задачах кінцевими технологічними умовами є $k(T)\ge k_T$, $C(T)\ge C_T$. Згідно із (2), (15) визначаємо кінцеве керування із рівняння $C_T=(1-a)(1-b)s(t)L_0^{\nu}e^{\nu n(T-t_0)}f(k_T)$ при заданих k_T і C_T, звідки

$$s(T)=(1-a)^{-1}(1-b)^{-1}L_0^{-\nu}e^{-\nu n(T-t_0)}f^{-1}(k_T)C_T,\ 0\le s(T)\le 1. \quad (19)$$

При виконанні обмеження $0 \le s(T) \le 1$ керування «часткове 2»

$$s_{r2} = s(T). \tag{20}$$

Із технологічних умов технологічних задач ІІ-ІІІ випливає, що найбільш простими є триярусні технологічні режими $(q = 3)$:

– для технологічної задачі І: «відсутнє + часткове + + часткове 2»;

– для технологічної задачі ІІ: «повне + часткове + + часткове 2»;

– для технологічної задачі ІІІ: «часткове + часткове 1 + + часткове 2».

Для триярусного технологічного режиму першому режиму буде відповідати лівий процес, другому – серединний процес і третьому режиму – правий процес. Кожен процес включає відповідне керування та траєкторію та відповідно оптимальний процес буде складатись як склейка лівого процесу із серединним, а серединний із правим процесом.

Перейдемо до побудови оптимальних процесів для трьох технологічних задач при вибраних триярусних режимах. Опишемо побудову оптимального процесу для технологічної задачі І при виборі триярусного технологічного режиму «відсутнє+часткове+часткове 2», а для інших технологічних задач (ІІ і ІІІ) при вибраних триярусних технологічних режимах побудова проводиться аналогічно.

Лівий процес. Для вибраного триярусного технологічного режиму «відсутнє+часткове+часткове 2» першим є режим «відсутнє» та йому відповідає керування $s^* = 0$. Назвемо це керування лівим керуванням $s_{лів} = s^* = 0$.

Відповідна ліва траєкторія $k_{лів}$ чисельним методом Рунге-Кута [11] обчислюється із рівняння руху капіталу (1) при $s = s_{лів} = 0$ та початковій умові (3) (задача Коші).

Другим режимом у вибраному триярусному технологічному режимі є режим «часткове», якому відповідає керування $s^*(t) = s_r(t),\ t \in [t_0, T]$ та яке приймемо за серединне керування $s_{серед}(t) = s_r(t),\ t \in [t_0, T]$.

Тоді за лівою траєкторією $k_{лів}$ та серединним керуванням $s_{серед}$ із рівняння (10) одним із чисельних методів розв'язування нелінійних рівнянь [10, с. 120] знаходимо перший момент перемикання керування ξ_1, тобто із нелінійного рівняння

$$C_T - (1-a)(1-b)L_0^{\nu} s_{серед}(\xi_1) e^{\nu n(\xi_1 - t_0)} f\left(k_{лів}(\xi_1)\right) = 0,$$
$$\xi_1 \in [t_0, T]. \tag{21}$$

Якщо $\xi_1 \notin [t_0, T]$ (тобто $\xi_1 \le t_0$ або $\xi_1 \ge T$), то необхідно підкоректувати вхідну інформацію моделі (1), (3)-(7). Нехай $\xi_1 \in (t_0, T)$. Тоді маємо лівий процес $\{\xi_{лів}, k_{лів},\ t \in [t_0, \xi_1)\}$.

Серединний процес. Нагадаємо серединне керування $s_{серед}(t) = s_r(t),\ \ t \in [\xi_1, T]$. Відповідна серединна траєкторія $k_{серед}(t),\ \ t \in [\xi_1, T]$ обчислюється із рівняння руху капіталу (1) при $s(t) = s_{серед}(t),\ t \in [\xi_1, T]$ та початковій умові $k_{серед}(\xi_1) = k_{лів}(\xi_1)$ чисельним методом Рунге-Кута [11]. Отримали серединний процес $\{\xi_{серед}, k_{серед},\ t \in [\xi_1, \xi_2)\}$ при невідомому другому моменті перемикання керування ξ_2 та який буде визначений у правому процесі.

Правий процес. Для вибраного триярусного технологічного режиму третім режимом є режим «часткове 2», якому відповідає керування $s(T)$ визначене за формулою (19) при заданих $k(T) = k_T$ і $C(T) = C_T$, тобто правим керуванням є $s_{ПР} = s(T)$.

Відповідна права траєкторія $k_{ПР}$ визначається із рівняння руху капіталу (1) при $s = s_{ПР}$ та крайовій умові $k(T) = k_T$, тобто із задачі

$$\dot{k}(t) = -(\mu + n)k(t) + (1-a)(1-b)L_0^{\nu-1}(1 - s_{ПР})e^{(\nu-1)n(t-t_0)} f\left(k(t)\right),$$
$$t \in [t_0, T],\ k(T) = k_T. \tag{22}$$

Для розв'язування (22) треба провести заміну $t = -y$, $\tilde{k}(y) = k(-y),\ y \in [-T, -t_0]$, отримаємо задачу Коші

$$\dot{\tilde{k}}(y) = (\mu + n)\tilde{k}(y) - (1-a)(1-b)L_0^{\nu-1}(1 - s_{ПР})e^{(\nu-1)n(-y-t_0)} f\left(\tilde{k}(y)\right),$$
$$\tilde{k}(-T) = k_T, \tag{23}$$

яку можна розв'язати чисельним методом Рунге-Кута [11]. У результаті чого знайдемо праву траєкторію $k_{ПР}(t) = k(-y),\ t \in [t_0, T]$. Абсциса точки перетину серединної траєкторії $k_{серед}(t)$ та правої траєкторії $k_{ПР}(t)$ дає момент ξ_2. Якщо момент $\xi_2 \notin (\xi_1, T)$ (тобто $\xi_2 \le \xi_1$ або $\xi_2 \ge T$), то необхідно підкоректувати вхідну інформацію моделі (1), (3)-(7). Нехай момент $\xi_2 \in (\xi_1, T)$. Тоді момент ξ_2 є моментом перемикання керувань. Маємо серединний процес $\{s_{серед}(t), k_{серед}(t),\ t \in [\xi_1, \xi_2)\}$ та правий процес $\{s_{ПР}, k_{ПР},\ t \in [\xi_2, T]\}$.

Тоді оптимальним процесом $\{s_{ОП}(t), k_{ОП}(t),$ $t \in [t_0, T]$ для вибраного триярусного режиму є склейки в момент ξ_1 лівого процесу $\{s_{ОП}(t) = s_{лів}(t),$ $k_{ОП}(t) = k_{лів}(t)\ t \in [t_0, \xi_1)\}$ із серединним процесом $\{s_{ОП}(t) = s_{серед}(t), k_{ОП}(t) = k_{серед}(t),\ t \in [\xi_1, \xi_2)\}$ та в момент ξ_2 серединного процесу із правим процесом $\{s_{ОП}(t) = s_{ПР}(t), k_{ОП}(t) = k_{ПР}(t),\ t \in [\xi_2, T]\}$.

Причому, оптимальне керування за нормою споживання $s_{ОП}(t)$ є кусково-неперервною функцією, а оптимальна траєкторія за питомим капіталом $k_{ОП}(t)$ є неперервною та кусково-диференційованою функцією на $[t_0, T]$.

Зауважимо, що при виборі багатоярусних технологічних режимів $(q \ge 2)$ та формуванні відповідних оптимальних процесів кількість серединних процесів дорівнює $(q-2)$, а кількість моментів перемикання керування – $(q-1)$.

Багатоярусні технологічні режими призначені для побудови багатоярусних оптимальних процесів та серед яких є можливість вибирати пріоритетний багатоярусний оптимальний процес.

Варта зауважити, що вище описана методика використання теорії оптимального керування для моделювання економічного зростання справедлива для моделі (1)-(7) при обмеженні на керування за нормою споживання

$$0 < s_1 \le s(t) \le s_2 < 1,\ t \in [0, T].$$

Висновки. Технологія використання теорії оптимального керування для моделювання однопродуктової макроекономіки зростання відіграє важливу роль у розумінні та прогнозуванні економічного розвитку. Цей підхід дозволяє враховувати різні зв'язки між різними факторами, що мають вплив на зростання економіки та відповідно знаходити оптимальні стратегії управління для досягнення максимальних бажаних результатів. Описана технологія використання теорії оптимального керування для однопродуктової макроекономіки зростання визначає три керування, тобто три технологічних режими, за якими можна сформувати багатоярусні технологічні режими та побудувати відповідні оптимальні процеси, серед яких є можливість вибирати пріоритетний оптимальний процес. За вибраним багатоярусним технологічним режимом проведено опис структури оптимальних процесів. Висновки, отримані з використання технології оптимального керування для моделювання однопродуктової макроекономіки зростання можуть бути використані у розробках стратегій розвитку, а також для прогнозування довгострокових наслідків рішень, прийнятих на макрорівні.

Список використаних джерел:

1. Григорків В.С. Оптимальне керування в економіці. Чернівці, 2011. 200 с.
2. Григорків В.С. Моделювання економіки: підручник. Чернівці, 2019. 360 с.
3. Модель Ремзі – Касса – Купманса. URL: http://surl.li/jjshu
4. Бойчук М.В., Вінничук О.Ю. Стохастичне моделювання та оптимізація однопродуктової макроекономіки зростання з ендогенним науково-технічним прогресом. *Електронне наукове видання Глобальні та національні проблеми економіки*. 2016. № 12. С. 561–566 (дата звернення: 08.07.2023).
5. Бойчук М.В., Вінничук О.Ю., Вінничук І.С. Стохастичне моделювання та оптимізація поведінки фірми в умовах досконалої конкуренції. *Вісник Чернівецького торговельно-економічного інституту*. 2018. Вип. ІІІ (71). С. 125–136.
6. Boychuk M.V, Vinnychuk O.Y., Skrashchuk L.V. Stochastic modelling of single-product growth macroeconomics with endogenous scientific and technological progress under investment lag. *Математичне моделювання.* 2022. № 2(47). С. 127–139.
7. Бойчук М.В., Семчук А.Р. Моделювання та оптимізація повного циклу однопродуктової макроекономіки зростання з урахуванням екологічного фактора. Чернівці, 2012. 208 с.
8. Бойчук М.В., Ярошенко О.І. Оптимізація кредитної стратегії компанії-дистриб'ютора на ринку фармацевтичної продукції. *Вісник Буковинського державного фінансово-економічного університету*. 2015. № 28. С. 258–263.
9. Бойчук М.В., Ярошенко О.І. Багатокрокова модель оптимальної стратегії компанії-дистриб'ютора на ринку фармацевтичної продукції. *Моделювання та інформаційні системи в економіці.* 2018. № 95. С. 5–12.
10. Григорків В.С., Ярошенко О.І. Числові методи : навч. посібник. Чернівці, 2018. 172 с.
11. Ясинський В.К. Основи обчислювальних методів. Чернівці, 2005. 396 с.

References:

1. Hryhorkiv V.S. (2011) Optymalne keruvannya v ekonomitsi [Optimal management in the economy]. Chernivtsi, 200 p.
2. Hryhorkiv V.S. (2019) Modeljuvannja ekonomiky: pidruchnyk [Modeling of the economy: a textbook]. Chernivtsi, 360 p.
3. Model Remzi–Kassa–Kupmansa. Available at: http://surl.li/jjshu
4. Boychuk M.V., Vinnychuk O.Y. (2016) Stokhastychne modeljuvannja ta optymizacija odnoproduktovoji makroekonomiky zrostannja z endoghennym naukovo-tekhnichnym proghresom [Stochastic modeling and optimization of single-product macroeconomics of growth with endogenous scientific and technological progress]. *Ghlobaljni ta nacionaljni problemy ekonomiky* (electronic journal), no. 12, pp. 561–566. Available at: http://global-national.in.ua/component/content/category/20-vipusk-12-serpen-2016-rzhurnal (accessed July 08, 2023).
5. Boychuk M.V., Vinnychuk O.Y., Vinnychuk I.S. (2018) Stokhastychne modeljuvannja ta optymizacija povedinky firmy v umovakh doskonaloji konkurenciji [Stochastic modeling and optimization of firm behavior under conditions of perfect competition]. *Visnyk Chernivecjkogho torghoveljno-ekonomichnogho instytutu*, no. III (71), pp. 125–136.
6. Boychuk M., Vinnychuk O., Skrashchuk L. (2022) Stochastic modelling of single-product growth macroeconomics with endogenous scientific and technological progress under investment lag. *Matematychne modeljuvannja* (electronic journal), no. 2(47), pp. 127–139. Available at: http://matmod.dstu.dp.ua/article/view/268416
7. Boychuk M.V., Semchuk, A.R. (2012) *Modeljuvannja ta optymizacija povnogho cyklu odnoproduktovoji makroekonomiky zrostannja z urakhuvannjam ekologhichnogho faktora* [Modeling and optimization of the full cycle of single-product macroeconomics of growth, taking into account the environmental factor]. Chernivtsi, 208 p.
8. Boychuk M., Yaroshenko O.I. (2015) Optymizacija kredytnoji strateghiji kompaniji-dystryb'jutora na rynku farmacevtychnoji produkciji [Optimizing the credit strategy of the distributor company in the pharmaceutical market]. *Visnyk Bukovynsjkogho derzhavnogho finansovo-ekonomichnogho universytetu,* no. 28, pp. 258–263.
9. Boychuk M., Yaroshenko O.I. (2015) Baghatokrokova modelj optymaljnoji strateghiji kompaniji-dystryb'jutora na rynku farmacevtychnoji produkciji [A multi-step model of the optimal strategy of a distributor company in the market of pharmaceutical products]. *Modeljuvannja ta informacijni systemy v ekonomici*, no. 95, pp. 5–12.
10. Hryhorkiv V.S., Yaroshenko O.I. (2018) Chyslovi metody [Numerical methods]: navch. posibnyk. Chernivtsi, 172 p.
11. Yasynsky V.K. (2005) Osnovy obchysljuvaljnykh metodiv [Fundamentals of computational methods]. Chernivtsi, 396 p.